6.2 Orthogonale Unterräume

a) Orthonormalbasis

Def.: Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen orthogonal, $v \perp w$, falls $\langle v, w \rangle = 0$. Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V heißt orthogonal, wenn $v_i \perp v_j$ für alle $i, j \in I$, $i \neq j$. Sie heißt zusätzlich orthonormal, wenn $\|v_i\| = 1$ für alle $i \in I$.

Bem.:

(1) $(v_i)_{i \in I}$ ist orthonormal $\Leftrightarrow$ $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in I$.

(2) Ist $(v_i)_{i \in I}$ orthogonal und $v_i \neq 0$ für alle $i \in I$, so gilt:

(i) $(\alpha_i v_i)_{i \in I}$ mit $\alpha_i := \frac{1}{\|v_i\|}$ ist orthonormal.

(ii) $(v_i)_{i \in I}$ ist linear unabhängig.

Bew.: (i) aus $\langle \alpha_i v_i, \alpha_j v_j \rangle = \overline{\alpha_i} \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle$ folgt Orthogonalität, Normierung aus $\overline{\alpha_i} \alpha_i = \alpha_i^2 = \frac{1}{\|v_i\|^2}$.

(ii) sei $J \subset I$ endlich. $\sum_{i \in J} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow$

$$0 = \left\langle \sum_i \lambda_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_i \overline{\lambda_i} \langle v_i, v_j \rangle = \overline{\lambda_j} \underbrace{\|v_j\|^2}_{\neq 0} \text{ für alle } j \in J.$$

$\square$

(3) Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von V. Für jedes $v\in V$ gilt:

$$v=\sum_{i\in I}\langle v_i,v\rangle v_i\,.$$

Da (v_i) Basis ist, sind nur endlich viele $\langle v_i,v\rangle \neq 0$.

Bew.: Sei $v=\sum_j \lambda_j v_j$,

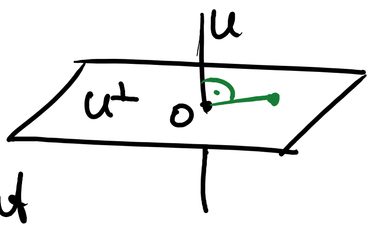
$$\langle v_i,v\rangle = \Big\langle v_i,\sum_j\lambda_j v_j\Big\rangle = \sum_j \lambda_j \overbrace{\langle v_j,v_i\rangle}^{\delta_{ji}} = \lambda_i\,.$$ □

6) Orthogonales Komplement

Def.: Zu einem Untervektorraum $U\subset V$ definieren wir das orthogonale Komplement als

$$U^\perp := \{v\in V \mid \langle u,v\rangle = 0 \text{ für alle } u\in U\}.$$

Bem.:



(1) Bsp.: $V=\mathbb{R}^3$, U eine Gerade. Dann ist $U^\perp$ die Ebene senkrecht zu U und durch 0. $\Rightarrow$ $U^\perp$ ist eindeutig bestimmt.

(2) $U^\perp$ ist ein Untervektorraum von V.

Bew.: $0\in U^\perp$. Für $v,v'\in U^\perp$, $\lambda\in K$ und alle $u\in U$:

$$\langle u,v+\lambda v'\rangle \underset{\uparrow\ \langle u,\cdot\rangle \text{ ist linear}}{=} \overset{0}{\cancel{\langle u,v\rangle}} + \lambda\,\overset{0}{\cancel{\langle u,v'\rangle}} = 0 \quad\Rightarrow\quad v+\lambda v'\in U^\perp$$ □

(3) es gilt: $U \cap U^\perp = \{0\}$. Anders ausgedrückt:

Sei $v \in U$. $\langle u, v\rangle = 0 \ \forall u \in U \Leftrightarrow v = 0$
für alle

Bew.:

$\Rightarrow$: $v \in U^\perp$. Mit $v \in U$ folgt $\langle v, v\rangle = \|v\|^2 = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

$\Leftarrow$: $v = 0$. Da $U, U^\perp$ Untervektorräume sind, ist $v \in U \cap U^\perp$.

$\square$

Ziel: wir wollen zeigen, daß allgemein $V = U \oplus U^\perp$.

c) orthogonale Projektion

VL #25

Def.: Eine Abbildung $P \in \mathrm{End}(V)$ heißt (lineare) Projektion auf einen Untervektorraum $U \subset V$, falls $\mathrm{im}\, P = U$ und $P^2 = P$. Gilt außerdem $\ker P = U^\perp$, so heißt P orthogonale Projektion.

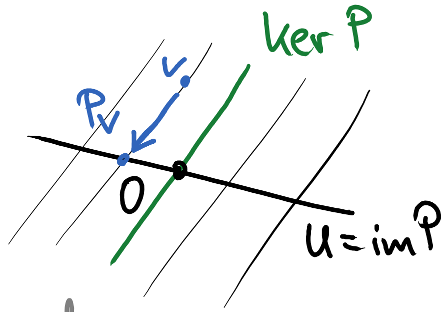
Bem.:

(1) für die Einschränkung auf U gilt: $P|_U = \mathrm{id}_U$

Bew.: zu $u \in U = \mathrm{im}\, P$ gibt es ein $v \in V$ mit $Pv = u$.

$\Rightarrow Pu = P^2 v \overset{(*)}{=} Pv = u$. (*) P ist Projektor. $\square$

(2) Ist $P \in \mathrm{End}(V)$ eine Projektion, so gilt: $V = \mathrm{im}\, P \oplus \ker P$.



<u>Bew.</u>: Für $v \in V$ gilt $v - Pv \in \ker P$, da
$P(v - Pv) = Pv - P^2 v = Pv - Pv = 0$.
Es gibt also $w \in \ker P$ mit $v = Pv + w$.
$\Rightarrow V = \mathrm{im}\, P + \ker P$.

Zu zeigen: $\mathrm{im}\, P \cap \ker P = \{0\}$.
Sei $u \in \mathrm{im}\, P \cap \ker P$, d.h. es gibt ein $v \in V$ mit $Pv = u$, und $Pu = 0$. $u = Pv = P(Pv) = Pu = 0$.

□

(3) Sei $U, W \subset V$ mit $V = U \oplus W$ gegeben. Dann definiert $P: V \to V$, $v = u + w \mapsto u$ (wobei $u \in U, w \in W$) eine lineare Projektion auf U. Es gilt $W = \ker P$.

<u>Bew.</u>: $P(V) = \mathrm{im}\, P \subset U$, $P(U) = P|_U(U) = U \subset \mathrm{im}\, P$, also $\mathrm{im}\, P = U$. Für $v \in V$ sei $u = P(v)$. Dann:
$P^2(v) = P(P(v)) = P(u) = P|_U(u) = u \Rightarrow P^2 = P$.

Der letzte Teil folgt aus (4).
Explizit: $P(W) = \{0\}$, also $W \subset \ker P$. Wegen $\dim W \overset{(1)}{=} \dim V - \dim U \overset{(2)}{=} \dim \ker P$ ist $W = \ker P$.

[1] direkte Summe [2] Dimensionsformel, $U = \mathrm{im}\, P$.

□

(4) für eine orthogonale Projektion auf U folgt:

$V = U \oplus U^\perp$.

bisher nur für solche U, auf die wir orthogonal projizieren können

(5) für einen Projektor P auf U ist $\ker P = U^\perp$ äquivalent zu $\langle u, v - Pv \rangle = 0 \quad \forall u \in U, v \in V$.

Bew.: $\Rightarrow$: nach (2) ist $v - \underbrace{Pv}_{\in \operatorname{im} P} \in \ker P \quad \forall v \in V$.
Für $\ker P = U^\perp$ gilt also $v - Pv \perp u \quad \forall u \in U$.

$\Leftarrow$: $w \in U^\perp \overset{\text{Df.}}{\Leftrightarrow} 0 = \langle u, w \rangle \overset{1}{=} \langle u, Pw \rangle \ \forall u$
$\overset{2}{\Leftrightarrow} Pw = 0 \overset{\text{Df.}}{\Leftrightarrow} w \in \ker P$

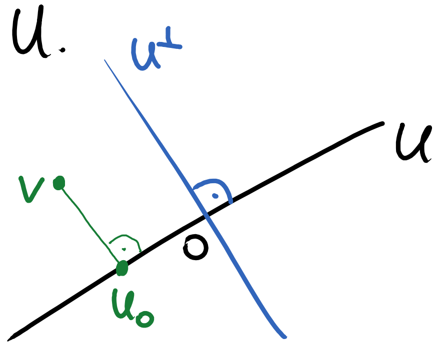
[1] lt. Voraussetzung, [2] $\Rightarrow$: wähle $u = Pw \in \operatorname{im} P$: $\|Pw\|^2 = 0$ $\square$

Satz: (Hilbertsches Projektionstheorem)

Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Zu jedem $v \in V$ gibt es ein eindeutiges $u_0 \in U$, welches $\|v - u_0\|$ minimiert. Dieses u_0 ist vollständig durch $v - u_0 \in U^\perp$ bestimmt. Die Abbildung

$$P_U : V \to U \,, \quad v \mapsto u_0 = \underset{u \in U}{\operatorname{argmin}} \|v - u\|$$

ist <u>der</u> orthogonaler Projektor auf U.



Bew.: Aufgabe 11.5

Bem.:

(6) Ist $(u_1, \dots, u_m)$ Orthonormalbasis von $U \subset V$, so hat der orthogonale Projektor auf U die Form

$$P_U v = \sum_{i=1}^m \langle u_i, v \rangle u_i \,.$$

Bew.:

- $$P_U^2 v = \sum_{i=1}^m \Big\langle u_i , \sum_{j=1}^m \langle u_j, v \rangle u_j \Big\rangle u_i$$
  $$= \sum_{i,j=1}^m \langle u_j, v \rangle \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{\delta_{ij}} u_i = P_U v \quad \text{für alle } v \in V.$$
- $\operatorname{im} P_U \subset U$ ist klar, und für alle $v \in U$ gilt $P_U v = v$ [vgl. §6.2a (3)]
- $v \in \operatorname{Ker} P_U \Leftrightarrow \langle u_i, v \rangle = 0$ für $i = 1, \dots, m$
  $\Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$ für alle $u \in U \Leftrightarrow v \in U^\perp$.

  also: $\operatorname{Ker} P_U = U^\perp$ $\square$

(7) $\mathrm{id}-P_U$ ist der orthogonale Projektor auf $U^\perp$

Bew.: $Q_U = \mathrm{id}-P_U$. $Q_U^2 = \mathrm{id} - 2P_U + P_U^2 = \mathrm{id} - P_U = Q_U$.
$\ker Q_U = \mathrm{im}\, P_U = U$, schließlich folgt aus
$V = \underbrace{\ker Q_U}_{U} \oplus U^\perp$, daß $\mathrm{im}\, Q_U = Q_U U^\perp = U^\perp - \underbrace{P_U U^\perp}_{0}$. □

d) Orthonormalisierungssatz

Satz: (Gram-Schmidt)
Jede orthonormale Familie $(v_1, \dots, v_m)$ in einem Vektorraum V mit $\dim V = n \geq m$ kann zu einer Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ von V ergänzt werden.

Korollar: Jeder endlichdimensionale Prähilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis.
(auch für separable Hilberträume, d.h. mit abzählbarer Basis)

Bew.: Ergänze zu einer Basis $(v_1, \dots, v_m, v'_{m+1}, \dots, v'_n)$ von V. Setze $U_r := \mathrm{span}(v_1, \dots, v_r)$. Dann ist nach Projektion, $\tilde{v}_{m+1} := v'_{m+1} - P_{U_m} v'_{m+1} \in U_m^\perp$, und Normierung, $v_{m+1} := \frac{\tilde{v}_{m+1}}{\|\tilde{v}_{m+1}\|}$, $(v_1, \dots, v_{m+1})$ eine Orthonormalbasis von U_{m+1}. Iterieren für $r = m+1, \dots, n-1$. □

Bem.:

(1) der Beweis des Satzes liefert uns das Gram-Schmidt-Verfahren zur Konstruktion einer Orthonormalbasis.

(2) Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Wähle $v_2' = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

$P_{U_1} e_1 = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\0\end{pmatrix}$

$$U_1 = \operatorname{span}(v_1). \quad P_{U_1} v = \langle v_1, v\rangle v_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} v$$

$$Q_{U_1} = \mathbb{1}_3 - P_{U_1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 = Q_{U_1} v_2' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \|\tilde{v}_2\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}$$

$$Q_{U_2} v = \underbrace{Q_{U_1} v}_{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} v} - \langle v_2, v\rangle v_2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_3 = Q_{U_2} v_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \|v_3\| = \sqrt{2} \Rightarrow \underline{v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow (v_1, v_2, v_3)$ ist Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, aber kein „Rechtssystem", da $\det(v_1, v_2, v_3) = -1$.

(3) aus dem Satz folgt ganz offensichtlich: $V = U \oplus U^\perp$ für alle Untervektorräume $U \subset V$. Außerdem: $(U^\perp)^\perp = U$.