5.3 Das Levi-Civita-Symbol

a) Permutationen

<u>Erinnerung:</u> Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet S_n die symmetrische Gruppe auf $\{1, \dots, n\}$, also die Gruppe der bijektiven Abbildungen $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$. (→ §1.2a)

Die Elemente $\sigma \in S_n$ heißen Permutationen.

<u>Bem.:</u>

(1) Es gibt $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ Möglichkeiten, $1, \dots, n$ anzuordnen, also hat S_n $n!$ Elemente.

(2) Ein „Fehlstand" von σ ist ein Indexpaar (i, j) mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Das Vorzeichen von σ ist $\operatorname{sgn} \sigma = \begin{Bmatrix} +1 \\ -1 \end{Bmatrix}$, falls σ eine $\begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix}$ Anzahl von Fehlständen hat.

Alternative: Anzahl der Nachbarvertauschungen

Bsp.: $\sigma : (1234) \mapsto (2413)$

$\Rightarrow$ 3 Fehlstände, also $\operatorname{sgn} \sigma = +1$.

b) Levi-Civita-Symbol

<u>Def.:</u> Das Levi-Civita-Symbol $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ in n Dimensionen hat n Indizes $1 \leq i_k \leq n$ und erfüllt:

(i) $\varepsilon_{12\dots n} = 1$, (Normierung)

(ii) unter Vertauschung zweier Indizes ändert sich das Vorzeichen: $\varepsilon_{ij\dots k\dots l\dots} = -\varepsilon_{ij\dots l\dots k\dots}$.

(total antisymmetrisch)

<u>Bem.:</u>

(1) aus (ii) folgt: falls zwei Indizes gleich sind, ist $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ gleich Null.

(2) sei $\sigma \in S_n$. Dann ist $\varepsilon_{\sigma(1) \dots \sigma(n)} = \operatorname{sgn} \sigma$.

(3) Beispiele:

$n = 2$: $\quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \; \varepsilon_{12} = 1, \; \varepsilon_{21} = -1$

$n = 3$: $\quad \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$ zyklisch

$\varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1$ antizyklisch

Für alle anderen Indizes ist $\varepsilon_{ijk} = 0$.

c) Leibnizformel

Erinnerung: Laplacesche Rekursionsformel:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}, \quad A \in K^{n\times n}.$$

$\Rightarrow$ nach Auflösen der Rekursion und Ausmultiplizieren:

$n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$ Summanden

Jeder Summand hat n Faktoren, aus jeder Zeile und Spalte von A taucht jeweils nur ein Eintrag auf.

Satz: (Leibniz)

Sei $A \in K^{n\times n}$ und bezeichne S_n die symmetrische Gruppe auf $\{1,\dots,n\}$, d.h. die Permutationen von $\{1,\dots,n\}$.

Dann ist $$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

Bew.: Fischer, § 3.2.5. (nur (D2) ist schwierig.)

Bem.:

(1) mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols schreiben wir:

$$\det A = \sum_{j_1\dots j_n} \varepsilon_{j_1,\dots,j_n} a_{1,j_1} \cdots a_{n,j_n}$$

$\Rightarrow$ enger Zusammenhang zwischen det und $\varepsilon_{i_1\dots i_n}$

(2) es gilt: $\varepsilon_{i_1 \cdots i_n} = \det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ \vdots \\ e_{i_n} \end{pmatrix}$

Kanonische Basisvektoren als Zeilen, $(e_i)_j = \delta_{ij}$

Bew.: $\det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ \vdots \\ e_{i_n} \end{pmatrix} = \sum_{j_1 \cdots j_n} \varepsilon_{j_1 \cdots j_n} \delta_{i_1 j_1} \cdots \delta_{i_k j_k} = \varepsilon_{i_1 \cdots i_k}.$ $\square$

(3) Beispiele:

für $n=2$: $\det A = \overset{+}{\varepsilon_{12}} a_{11} a_{22} + \overset{-}{\varepsilon_{21}} a_{12} a_{21}$

$n=3$: $\det A = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$

(vgl. Sarrus-Regel)

$$\varepsilon_{213} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

d) Kreuz- und Spatprodukt

Def.: Das Kreuzprodukt zweier Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ definieren wir als $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$a \times b := \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} a_i b_j e_k .$$

Standardbasis

Bem.:

(1) es gilt $a \times b = -b \times a$, da $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$.

Folge: $a \times a = 0$.

(2) $\times$ ist eine bilineare Abbildung:

$(a + \lambda a') \times b = a \times b + \lambda (a' \times b)$, analog für b.

(3) für die Standardbasis gilt:

$$e_i \times e_j = \sum_k \varepsilon_{ijk} e_k, \qquad \text{z.B.: } e_1 \times e_2 = e_3$$

<u>Def.:</u> Das Spatprodukt von $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ ist definiert als $(a \times b) \cdot c = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$.

<u>Bem.:</u>

(4) verträglich mit Standardskalarprodukt: (→ Kap. 6)

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(5) es gilt:

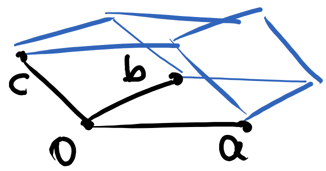
$$(a \times b) \cdot c = \det(a, b, c) \leftarrow \text{Spalten}$$

(6) Folgerungen: $(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = a \cdot (b \times c)$

(zyklisch vertauschen)

$$(a \times a) \cdot c = (a \times b) \cdot a = (a \times b) \cdot b = 0$$

(7) $|\det(a, b, c)|$ ist das Volumen des durch a, b, c aufgespannten Spats (Parallelepipeds).



(8) Vektoranalysis: $a: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diff.bares Vektorfeld

$$\operatorname{rot} a(x) := \nabla \times a(x) = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} a_j(x)\, e_k$$

(9) Verallgemeinerung: Differentialformen, Tensoranalysis (grad, rot, div in n Dimensionen)

→ Differentialgeometrie, Allgemeine Relativitätstheorie