4.3 Darstellung durch Matrizen

a) Iso-, Endo- und Automorphismen

Def.: Sei $f: V \to W$ linear.
Ist f zusätzlich bijektiv, so nennen wir es **Isomorphismus**; ist $V = W$, so ist f ein **Endomorphismus**; und falls $V = W$ und f bijektiv, so heißt f **Automorphismus**.

Bem.:

(1) Ist f ein Isomorphismus, so ist $f^{-1}: W \to V$ linear.

Bew.: Seien $w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in K$. Für $v_i = f^{-1}(w_i)$, $i = 1, 2$, gilt $f(\lambda v_1 + v_2) = \lambda f(v_1) + f(v_2) = \lambda w_1 + w_2$.
$\Rightarrow f^{-1}(\lambda w_1 + w_2) = \lambda v_1 + v_2 = \lambda f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)$. $\square$

(2) Sind U, V, W Vektorräume und $g: U \to V$ und $f: V \to W$ linear, so ist auch die Komposition $f \circ g: U \to W$ linear. Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "f"] & \\ U \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f \circ g"'] & & W \end{tikzcd}$$

Bew.: Für $u_1, u_2 \in U$, $\lambda \in K$ gilt:
$$(f \circ g)(\lambda u_1 + u_2) = f(g(\lambda u_1 + u_2)) = f(\lambda g(u_1) + g(u_2))$$
$$= \lambda f(g(u_1)) + f(g(u_2)) = \lambda (f \circ g)(u_1) + (f \circ g)(u_2). \quad \square$$

(3) Für K-Vektorräume V und W definieren wir die Menge der Homomorphismen von V nach W:

$$\mathrm{Hom}(V,W) := \{f: V \to W \mid f \text{ linear}\}.$$

Dann ist $\mathrm{Hom}(V,W)$ ein Untervektorraum von W^V.

Der „Nullvektor" $\underline{0} \in \mathrm{Hom}(V,W)$ ist die Abbildung:

$$\underline{0}: V \to W, \quad v \mapsto 0 \in W, \text{ d.h. } \underline{0}(v) = 0 \text{ für alle } v \in V.$$

Bew.: Für $f, g \in \mathrm{Hom}(V,W)$ und $\lambda \in K$ ist zu zeigen, daß $f+g$ und λf linear sind.

Seien $v_1, v_2 \in V$ und $\mu \in K$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(f+g)(\mu v_1 + v_2) &= f(\mu v_1 + v_2) + g(\mu v_1 + v_2) \\ &= \mu f(v_1) + f(v_2) + \mu g(v_1) + g(v_2) \\ &= \mu (f+g)(v_1) + (f+g)(v_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda f)(\mu v_1 + v_2) &= \lambda f(\mu v_1 + v_2) = \lambda \mu f(v_1) + \lambda f(v_2) \\ &= \mu (\lambda f)(v_1) + (\lambda f)(v_2)\end{aligned}$$

□

(4) Für $V = W$ ist $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V,V)$ der Vektorraum der Endomorphismen auf V. Mit der Komposition als Multiplikation wird $\mathrm{End}(V)$ zu einem Ring.

Für $\dim V = n < \infty$ ist dieser Endomorphismenring isomorph zu den $n \times n$-Matrizen: $\mathrm{End}(V) \cong K^{n \times n}$

b) Erzeugung linearer Abbildungen

Wieviele Punkte $f(v_i)=w_i$ dürfen/müssen wir vorgeben, damit die lineare Abbildung f vollständig definiert ist?

<u>Satz:</u> Gegeben seien Vektorräume V und W sowie Familien $(v_i)_{i\in I}$ in V und $(w_i)_{i\in I}$ in W.

i) Ist $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig, so gibt es mindestens ein $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ mit $f(v_i)=w_i$ für alle $i \in I$.

ii) Ist $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis, so gibt es genau ein solches f. Es hat die Eigenschaften:

a) $\mathrm{im}\, f = \mathrm{span}(w_i)_{i\in I}$,

b) f injektiv $\Leftrightarrow$ $(w_i)_{i\in I}$ ist linear unabhängig.

<u>Beispiel 1:</u>

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. $v_1=(1,0,0)$, $v_2=(0,1,0)$.

Setze $f(v_1):=(1,2,0)$. $\Rightarrow f((\lambda,0,0)) = (\lambda, 2\lambda, 0)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

$f(v_2):=(1,2,0)$ $\Rightarrow f((0,\mu,0)) = (\mu, 2\mu, 0)$, $\mu\in\mathbb{R}$.

Damit ist f auf $\mathrm{span}(v_1,v_2)$ definiert:

$f((\lambda,\mu,0)) = (\lambda+\mu, 2(\lambda+\mu), 0)$, aber $f((0,0,\nu))$ ist noch beliebig. Setze $v_3=(0,0,1)$ und $f(v_3)=(0,0,3)$.

$\Rightarrow f(x) = (x_1+x_2, 2(x_1+x_2), 3x_3)$, $x=(x_1,x_2,x_3)$,

f ist auf $\mathbb{R}^3$ vollständig fixiert. (f ist nicht injektiv)

Bew.: Zunächst ii): Ist $(v_i)_{i\in I}$ Basis von V, so gilt für jedes $v\in V$: $v=\sum_{i\in I}\mu_i v_i$ mit endlich vielen $\mu_i \neq 0$.
Notwendig für f linear ist: $f(v)=\sum_i \mu_i f(v_i)=\sum_i \mu_i w_i \in W$.
Damit ist $f\in \mathrm{Hom}(V,W)$ eindeutig bestimmt und tatsächlich auch linear.

Beweis: $v=\sum_{i\in J}\mu_i v_i$, $\tilde{v}=\sum_{i\in J}\tilde{\mu}_i v_i$, $J\subset I$ endlich, $\lambda\in K$.
$f(\lambda v+\tilde{v}) = f\left(\sum_{i\in J}(\lambda\mu_i+\tilde{\mu}_i)v_i\right)=\sum_{i\in J}(\lambda\mu_i+\tilde{\mu}_i)w_i=\lambda f(v)+f(\tilde{v})$

a) $\mathrm{im}\, f = f(\mathrm{span}(v_i)) = \mathrm{span}(f(v_i)) = \mathrm{span}(w_i)$

b) für f linear gilt: f injektiv $\Leftrightarrow$ $\ker f=\{0\}$

$\Rightarrow$: sei $(w_i)_{i\in I}$ linear abhängig. Dann gibt es $J\subset I$ endlich und $\mu_i\in K$, $\mu_i\neq 0$ für $i\in J$ mit $\sum_{i\in J}\mu_i w_i = 0$. Folglich ist $v:=\sum_{i\in J}\mu_i v_i \in \ker f$, aber $v\neq 0$ $\lightning$ $\ker f=\{0\}$.

$f(v)=\sum \mu_i f(v_i)$

$\Leftarrow$: Sei $v\in \ker f$ mit $v=\sum_{i\in J}\lambda_i v_i$, dann ist $f(v)=\sum_i \mu_i w_i = 0$.
Aus $(w_i)_{i\in I}$ linear unabhängig folgt $\lambda_i=0$ für alle $i\in J$, also $v=0$. $\Rightarrow$ $\ker f=\{0\}$.

Beweis von i): ergänze $(v_i)_{i\in I}$ durch $(u_j)_{j\in S}$ zu einer Basis von V und setze $f(u_j)=0$ für $j\in S$.
oder irgendein $w_j\in W$.
$\Rightarrow$ $f\in\mathrm{Hom}(V,W)$ existiert nach ii).

$\square$

c) Koordinatendarstellungen

VL #17

Korollar 1:

Ist V ein Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, so gibt es genau einen Isomorphismus

$$\Phi_{\mathcal{B}} : K^n \to V \text{ mit } \Phi_{\mathcal{B}}(e_j) = v_j \text{ für } j = 1, \dots, n,$$

wobei $(e_1, \dots, e_n)$ die kanonische Basis von K^n ist.

Def.: Dieses $\Phi_{\mathcal{B}}$ heißt das durch $\mathcal{B}$ bestimmte Koordinatensystem in V. Die Koordinaten $x = (x_1, \dots, x_n)$ von $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ sind gegeben durch $x = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v) \in K^n$.

Bsp.: $\mathbb{R}[t]_4$, reelle Polynome vom (bis) Grad 4.

Basis: $\mathcal{B} = (t^0, t^1, \dots, t^4)$.

$$\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}[t]_4, \quad \Phi_{\mathcal{B}}((x_0, \dots, x_4)) = x_4 t^4 + \dots + x_1 t + x_0.$$

Korollar 2:

Zu jedem $f : K^n \to K^m$ gibt es genau eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ mit $f(x) = Ax$ für alle Spalten $x \in K^n$.

Bew.: $A = (f(e_1), \dots, f(e_n))$. $\square$

„Die Spalten sind die Bilder der Basisvektoren."

Für Bsp. 1 folgt: $f(x) = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Satz: Gegeben seien K-Vektorräume V mit Basis $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ und W mit Basis $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$.
Dann gibt es zu jedem $f: V \to W$ linear genau eine Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$, so daß

$$(*) \qquad f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \qquad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Die so erhaltene Abbildung

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : \operatorname{Hom}(V, W) \longrightarrow K^{m \times n}, \quad f \mapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = A,$$

ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Bem.:

(1) nach Festlegung von Basen in V und W kann man lineare Abbildungen durch Matrizen ersetzen.

(2) die Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$ heißt darstellende Matrix von f bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Bew.: Da $\mathcal{A}$ Basis von V ist, ist f durch Angabe von $f(v_j) \in W$ eindeutig bestimmt. Da $\mathcal{B}$ Basis von W ist, ist $f(v_j)$ für festes $j = 1, \dots, n$ Linearkombination der (w_i) mit eindeutigen Koeffizienten $(a_{ij})_{i=1,\dots,m}$ $\Rightarrow$ Spalte j von A.
Also ist A zu f eindeutig bestimmt. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ ist eine Abbildung.
Umgekehrt gibt es zu jedem $A \in K^{m \times n}$ genau ein f, das $(*)$ erfüllt, da $\mathcal{A}$ Basis von V ist. $\Rightarrow$ $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ ist bijektiv.

zu zeigen: $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ ist linear.

Sei $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) = A$ und $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(g) = B$, $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $\lambda \in K$.

Dann: $(\lambda f + g)(v_j) = \lambda f(v_j) + g(v_j) = \lambda \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij} w_i$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\lambda a_{ij} + b_{ij}) w_i$$

Also ist $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\lambda f + g) = (\lambda a_{ij} + b_{ij}) = \lambda A + B$

$$= \lambda M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) + M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(g).$$

□

<u>Bem.:</u>

(3) Für $f: V \to W$ linear hat man mit den Koordinatensystemen $\Phi_{\mathcal{A}}: K^n \to V$ und $\Phi_{\mathcal{B}}: K^m \to W$ das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "\Phi_{\mathcal{A}}", "\cong"'] \arrow[d, "M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)"'] & V \arrow[d, "f"] \\
K^m \arrow[r, "\cong", "\Phi_{\mathcal{B}}"'] & W
\end{tikzcd}$$

$\downarrow\rightarrow \;=\; \rightarrow\downarrow$

Es gilt: $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{A}}$. $\quad \Phi_{\mathcal{B}} \circ M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) = f \circ \Phi_{\mathcal{A}}$

<u>Bew.:</u> Für $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$, $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{ij})$ und $x \in K^n$ heißt das Diagramm konkret:

$$w := f(\Phi_{\mathcal{A}}(x)) \overset{1}{=} f\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\Big) \overset{2}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j) \overset{3}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

$$\overset{4}{=} \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big) w_i \overset{5}{=} \Phi_{\mathcal{B}}(Ax) = \Phi_{\mathcal{B}}(M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)(x))$$

[1] Def. $\Phi_{\mathcal{A}}$, [2] f linear, [3] Def. (a_{ij}), [4] Umordnen, [5] Def. $\Phi_{\mathcal{B}}$ □

(4) Die Komposition linearer Abbildungen entspricht dem Produkt der darstellenden Matrizen. Genauer:

<u>Satz:</u> Gegeben seien Vektorräume U, V, W mit Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ und lineare Abbildungen $g: U \to V$ und $f: V \to W$.
Dann gilt: $\quad M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}(f \circ g) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \cdot M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(g)$.

<u>Bew.:</u> das folgende Diagramm ist kommutativ, da alle Teildiagramme kommutativ sind:

$$\begin{tikzcd}
K^r \arrow[rrr, "\Phi_{\mathcal{A}}"] \arrow[dr, "B"] \arrow[dd, "A \cdot B"'] & & & U \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, "f \circ g"] \\
& K^m \arrow[r, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \arrow[dl, "A"] & V \arrow[dr, "f"] & \\
K^n \arrow[rrr, "\Phi_{\mathcal{C}}"'] & & & W
\end{tikzcd}$$

$A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$
$B = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(g)$

Insbesondere folgt: $\quad (f \circ g) \circ \Phi_{\mathcal{A}} = \Phi_{\mathcal{C}} \circ (A \cdot B)$. $\square$

(5) Sei $A = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$, dann gilt $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} f$, unabhängig von der Wahl von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

[vgl. 4.2c (1)]

<u>Bew.:</u> $\quad A = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{A}}$,
$\Phi_{\mathcal{A}}, \Phi_{\mathcal{B}}$ sind Isomorphismen, sie ändern die Dimension von Bild und Kern nicht. Also:
$\operatorname{rang} A = \dim \operatorname{im}(\Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{A}}) = \dim \operatorname{im} f = \operatorname{rang} f$.
$\square$

(6) Aus der Dimensionsformel (§4.2a) ergibt sich das folgende Korollar:

Korollar: Seien $f: V \to W$ linear, $n = \dim V$, $m = \dim W$ und $r = \operatorname{rang} f$. Dann gibt es Basen $\mathcal{A}$ von V und $\mathcal{B}$ von W, so daß

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{r} & \overbrace{\quad}^{n-r} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \}r \\ \}m-r \end{array} \end{array} \in K^{m \times n}.$$

Bew.:

Wähle $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_k)$ mit $k = n - r$ so, daß $\operatorname{span}(u_1, \dots, u_k) = \ker f$. $\Rightarrow$ k Nullspalten.

Dann ist $\mathcal{B}' = (f(v_1), \dots, f(v_r))$ eine Basis von $\operatorname{im} f$, also sind alle $a_{ij} = \delta_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq r$. $f(v_j) = \sum_{i=1}^{r} \delta_{ij} w_i = w_j$

Ergänze zu Basis $\mathcal{B}$ von W $\Rightarrow$ $m - r$ Nullzeilen.

$\square$

Beispiel: Aufgabe 7.5

Nachträge:

(1) Die Matrix $M_B(f)$ ist genau dann invertierbar, wenn f bijektiv, d.h. ein Automorphismus, ist.

Bew.: Sei $A = M_B(f)$. $\Rightarrow$: nehme $g \in End(V)$ mit $M_B(g) = A^{-1}$. Dann ist $M_B(g \circ f) = A^{-1}A = \mathbb{1} = AA^{-1} = M_B(f \circ g) = M_B(id)$, also $f^{-1} = g$. $\Leftarrow$: $B = M_B(f^{-1}) \Rightarrow AB = BA = \mathbb{1}$. $\square$

→ §3.2b

(2) Eine $n \times n$-Matrix ist entweder invertierbar oder Nullteiler.

Bew.: falls A nicht invertierbar ist, dann ist $f: K^n \to K^n$ mit $f(x) = Ax$ nicht injektiv. Also existieren eine Spalte $b \in \ker f$, $b \neq 0$ und eine $n \times n$-Matrix $B = (b, \ldots, b) \neq 0$ so daß $A \cdot B = 0$. $\square$