4.2 Der Faktorisierungssatz

a) Dimensionsformel

<u>Proposition:</u> Für $f: V \to W$ linear gilt: $\dim f(V) \leq \dim V$.

<u>Bew.:</u> Sei $(w_i)_{i\in I}$ eine Basis von $f(V)$. Dann gibt es $v_i \in V$ mit $w_i = f(v_i)$ für alle $i \in I$. Nach §4.1 (7) ist $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig, aber nicht notwendigerweise maximal. Also ist $\dim f(V) = |I| \leq \dim V$. $\square$

<u>Satz:</u> Seien $f: V \to W$ linear und $\dim V < \infty$. Sind Basen $(u_1, \dots, u_k)$ von $\ker f$ und $(w_1, \dots, w_r)$ von $\operatorname{im} f$ sowie Vektoren $v_i \in f^{-1}(w_i)$, $i = 1, \dots, r$, gegeben, so ist $A = (v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_k)$ eine Basis von V.

Insbesondere gilt: $\boxed{\dim V = \dim \operatorname{im} f + \dim \ker f.}$

$$(r+k) = r + k$$

<u>Bew.:</u> Für $v \in V$ sei $f(v) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i w_i \in \operatorname{im} f$.

Setze $v' := \sum_{i=1}^{r} \mu_i v_i \in V$, dann ist $f(v') = f(v)$.

$\Rightarrow f(v - v') = 0$, also $v - v' =: \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j \in \ker f$.

$v = \sum_{i=1}^{r} \mu_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j \in \operatorname{span}(A)$, damit wird V von A erzeugt. Lineare Unabhängigkeit von A:

Sei $\sum_{i=1}^{r} \mu_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j = 0$. Wegen $f(u_j) = 0$ und $f(v_i) = w_i$ folgt $\sum_{i=1}^{r} \mu_i w_i = 0$, doch $(w_1, \dots, w_r)$ ist lin. unabh. $\Rightarrow \mu_i = 0$.

Es bleibt $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j = 0$, aber $(u_1, \dots, u_k)$ ist lin. unabh. $\Rightarrow A$ ist Basis. $\square$

Korollar 1: Für alle Fasern $f^{-1}(w) \neq \emptyset$ gilt:

$\dim f^{-1}(w) = \dim V - \dim \operatorname{im} f$, falls $\dim V < \infty$.

Bew.: §4.1c(5): $\dim f^{-1}(w) = \dim \ker f$. □

Korollar 2: Zwei endlichdimensionale Vektorräume V und W sind genau dann isomorph, wenn $\dim V = \dim W$.

$V \cong W \Leftrightarrow$ es gibt eine bijektive, lineare Abb. $f: V \to W$.

Bew.: f surjektiv $\Leftrightarrow \operatorname{im} f = W$, f injektiv $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$.
f bijektiv $\Rightarrow \dim V = \dim W$.
Umkehrung: Seien $(v_1, \dots, v_n)$ und $(w_1, \dots, w_n)$ Basen von V bzw. W. Die lineare Abbildung mit $f(v_i) = w_i$ ist bijektiv. □

Korollar 3: Sei $\dim V = \dim W < \infty$. Für eine lineare Abbildung $f: V \to W$ ist dann äquivalent:

i) f ist injektiv,
ii) f ist surjektiv,
iii) f ist bijektiv.

Bew.: injektiv $\overset{\text{Df.}}{\Leftrightarrow} \dim \ker f = 0 \overset{\text{Satz}}{\Leftrightarrow} \dim \operatorname{im} f = \dim V$
$\overset{\text{Voraussetzung}}{\Leftrightarrow} \dim \operatorname{im} f = \dim W \overset{\operatorname{im} f \subset W}{\Leftrightarrow} \operatorname{im} f = W \overset{\text{Df}}{\Leftrightarrow}$ surjektiv □

b) Faktorisierungssatz

Satz: (Faktorisierungssatz)
Seien $f: V \to W$ linear und $A = (u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_k)$ eine Basis von V mit $\ker f = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_k)$. Setzen wir $U := \mathrm{span}(u_1, \dots, u_r)$, so gilt:

i) $V = U \oplus \ker f$.

ii) Die Einschränkung $f|_U : U \to \mathrm{im}\, f$ ist ein Isomorphismus.

iii) Bezeichnen $\pi: V = U \oplus \ker f \to U$, $v = u + v' \mapsto u$, die Projektion auf U und $\iota: \mathrm{im}\, f \to W$, $w \mapsto \iota(w) = w$, ein Inklusion, so ist $f = \iota \circ f|_U \circ \pi$. Das folgende Diagramm ist kommutativ:

Iota

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"', "\text{Projektion}"] & W \\ U \arrow[r, "f|_U", "\cong"'] & \mathrm{im}\, f \arrow[u, "\iota", "\text{Inklusion}"'] \end{tikzcd}$$

(Alle Wege sind gleichwertig.)

Insbesondere hat jede Faser $f^{-1}(w) \neq \emptyset$ mit U genau einen Schnittpunkt, und es ist $\pi(v) = f^{-1}(f(v)) \cap U$.

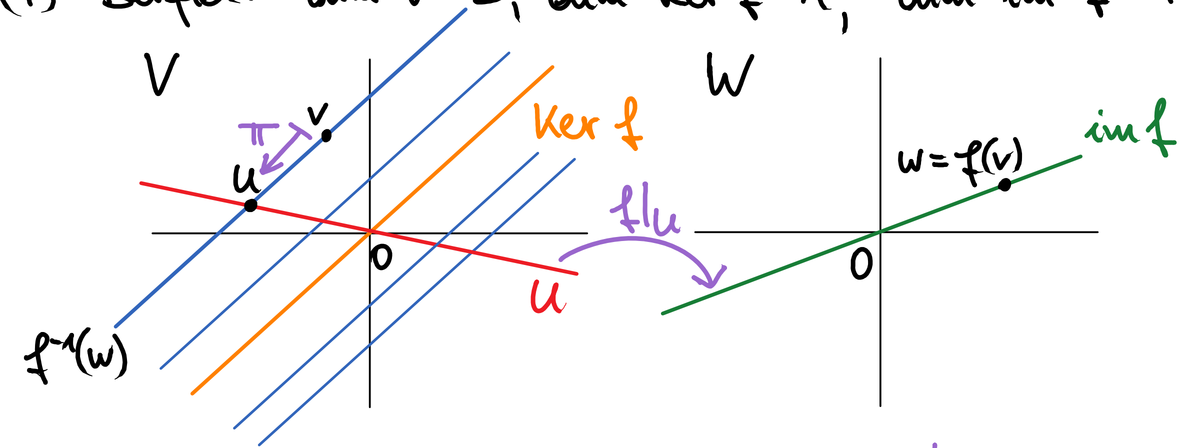
Bem.:

(1) $f: V \to W$ läßt sich in drei Anteile zerlegen (faktorisieren): Parallelprojektion — Isomorphismus — Inklusion

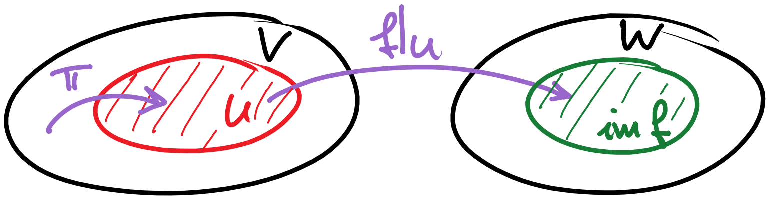
(2) der direkte Summand U ist nicht eindeutig bestimmt (man kann zusätzlich Orthogonalität verlangen) → später
Es gilt: $\dim U = \dim \mathrm{im}\, f$.

(3) die Umkehrung im $f \to U$ von $f|_U$ heißt Schnitt,
sie schneidet den Punkt $\pi(v)$ aus der Faser über $f(v)$ aus.
(Erinnerung: $f^{-1}(w) = v + \ker f$, $f(v) = w$)

(4) Beispiel: $\dim V = 2$, $\dim \ker f = 1$, $\dim \operatorname{im} f = 1$



Als Mengendiagramm:



<u>Bew.</u> des Satzes:

i) Darstellung $v = u + v' \in U + \ker f$ ist eindeutig $\Rightarrow$ direkte Summe.

ii) $\ker f|_U = \{v \in U \mid f(v) = 0\} = (\ker f) \cap U = \{0\}$, also ist $f|_U$ injektiv. $\Rightarrow$ bijektiv wegen $\dim U = \dim \operatorname{im} f$. Dimensionsformel

iii) Sei $v \in V$ mit $v = u + v'$, $u \in U$, und $w := f(v)$. Dann gilt: $\pi(v) = u$ und $f|_U(u) = f(u) = w$, da $v' \in \ker f$.

$\Rightarrow (f|_U \circ \pi)(v) = f|_U(\pi(v)) = f|_U(u) = w = f(v)$ für alle $v \in V$.

Zuletzt: sei $w_i = f(u_i)$, $i = 1, \dots, r$, eine Basis von $\operatorname{im} f$.
Aus $f(v) = w = \sum_i \mu_i w_i$ und $u \in f^{-1}(w) \cap U$ folgt
$u = \sum_i \mu_i u_i \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(w) \cap U}_{f|_U^{-1}(w)} = \{u\}$ und $\pi(v) = u$.
(u ist eindeutig)

$\square$

c) Lineare Gleichungssysteme

12.12.

__Ziel:__ Anwendung der Theorie linearer Abbildungen auf die Lösung linearer Gleichungssysteme aus §3.3.

__Def.:__ Den Rang einer linearen Abbildung f definieren wir als $\operatorname{rang} f := \dim(\operatorname{im} f)$.

__Bem.:__

(1) Jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ definiert eine lineare Abbildung $f_A : K^n \to K^m$, $x \mapsto Ax$. ← Spalte

Für die kanonische Basis $(e_1, \dots, e_n)$ des K^n sind $Ae_1, \dots, Ae_n$ die Spalten von A. Dann ist der Spaltenraum von A gleich

$$\operatorname{span}(\underbrace{Ae_1}_{f_A(e_1)}, \dots, Ae_n) \underset{\substack{\uparrow \\ f_A \text{ linear}}}{=} f_A(K^n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def.}}}{=} \operatorname{im} f_A$$

$\Rightarrow$ $\underset{\substack{\| \\ \text{Zeilenrang (§3.3a)}}}{\text{Spaltenrang}}$ von A $= \dim \operatorname{im} f_A = \operatorname{rang} f_A$.

(2) Jede Spalte $b \in K^m$ definiert mit A ein lineares Gleichungssystem (LGS) $\quad Ax = b$

mit Lösungsraum $\quad \text{Lös}(A, b) := \{x \in K^n \mid Ax = b\}$.

(3) Offenbar ist $\text{Lös}(A,b) = f_A^{-1}(b)$ eine Faser von f_A.
Das zugehörige homogene LGS erfüllt
$\text{Lös}(A,0) = \ker f_A$.
Aus der Dimensionsformel für f_A folgt das

<u>Korollar:</u> Sei $Ax = b$ ein LGS aus m Gleichungen für n Unbekannte mit $r = \text{rang}\, A$. Dann gilt:

i) $\text{Lös}(A,0) \subset K^n$ ist ein Untervektorraum der Dimension $n-r$.

ii) $\text{Lös}(A,b) \subset K^n$ ist entweder leer oder ein affiner Raum der Dimension $n-r$. Für $x_0 \in \text{Lös}(A,b)$ beliebig gilt:
$$\underbrace{\text{Lös}(A,b)}_{\text{allgemeine Lösung des inhomogenen LGS}} = \underbrace{x_0}_{\text{spezielle}} + \underbrace{\text{Lös}(A,0)}_{\text{allgemeine Lösung des homogenen LGS}}.$$

(4) Ein homogenes LGS hat stets die triviale Lösung $x = 0 \in \ker f_A$.
Das inhomogene LGS $Ax = b$ hat nur dann eine Lösung, falls $b \in \text{im}\, f_A$. Kriterium?

<u>Satz:</u> Der Lösungsraum von $Ax = b$ ist genau dann nicht leer, falls $\text{rang}\, A = \text{rang}\, (A|b)$.

__Bew.:__ $\text{Lös}(A,b) = f_A^{-1}(b) \neq \emptyset \Leftrightarrow b \in \operatorname{im} f_A$.

Sei $\tilde{f}_A : K^{n+1} \to K^m$, $x \mapsto (A|b)\,x$.

Für die Standardbasis $(e_1, \dots, e_{n+1})$ des K^{n+1} gilt:

$f_A(e_i) = \tilde{f}_A(e_i)$ für $i = 1, \dots, n$. $\Rightarrow \operatorname{im} f_A \subset \operatorname{im} \tilde{f}_A$

Also: $\operatorname{rang} f_A = \operatorname{rang} \tilde{f}_A \Leftrightarrow \operatorname{im} f_A = \operatorname{im} \tilde{f}_A$.

Außerdem: $\tilde{f}_A(e_{n+1}) = b$, also $b \in \operatorname{im} \tilde{f}_A$.

Wegen $\operatorname{im} \tilde{f}_A = \operatorname{span}(\tilde{f}_A(e_i))_{i=1,\dots,n+1}$ gilt auch:

$b \in \operatorname{im} f_A \Leftrightarrow \operatorname{im} f_A = \operatorname{im} \tilde{f}_A$. $\square$

__Bem.:__

(6) Für $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$ ist $Ax = b$ genau dann **eindeutig lösbar**, falls $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|b) = n$.

Für $m = n$ ist **A invertierbar** und $x = A^{-1}b$.

__Bew.:__ $\dim f_A^{-1}(b) = n - \operatorname{rang} f_A = 0$, falls $b \in \operatorname{im} f_A$.

$m = n$: $f_A : K^n \to K^n$ ist surjektiv, also auch bijektiv. $\square$

(7) Wie hängt die spezielle Lösung $x_0 \in \text{Lös}(A,b)$ von b ab?

Sei (A,b) in Zeilenstufenform mit Pivots $a_{11}, \dots, a_{rr}$ und $r = \operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A,b)$, d.h. $b_{r+1} = \dots = b_m = 0$.

Dann gibt es eine lineare Abbildung $\varphi_A : K^r \to K^n$, so daß $\text{Lös}(A,b) = \varphi_A(\hat{b}) + \text{Lös}(A,0)$ mit $\hat{b} := (b_1, \dots, b_r) \in K^r$.

„Die Lösung hängt linear von b ab."

Bew.: φ_A ist gerade ein Schnitt $f|_U^{-1}: \mathrm{im}\, f \to U$ wie in §4.3b. Zu zeigen: $f|_U^{-1}$ ist linear. ↗ §4.3a

Konstruktiver Beweis:

Aus der Lösung in §3.3b(5) folgt: $(\lambda_j = 0)$

$$\underset{\uparrow \text{ Komponente } i}{x_0^{(i)}} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=i+1}^{r} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \underbrace{\left(\frac{b_j}{a_{jj}} - \sum_{k=j+1}^{r} \frac{a_{jk}}{a_{jj}} \left(\frac{b_k}{a_{kk}} - \dots \right) \right)}_{x_0^{(j)}}$$

Also ist

$$x_0 = \varphi_A(b) = \begin{array}{r} \\ \\ n-r \{ \end{array} \begin{pmatrix} c_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{rr} \\ \hline & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}$$

mit $c_{ij} = 0$ für $i > j$, $c_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$, $c_{i,i+1} = -\frac{a_{i,i+1}}{a_{ii}\, a_{i+1,i+1}}$,

$$c_{i,i+2} = + \frac{a_{i,i+1}}{a_{ii}} \frac{a_{i+1,i+2}}{a_{i+1,i+1}} \frac{1}{a_{i+2,i+2}} - \frac{a_{i,i+2}}{a_{ii}\, a_{i+2,i+2}}, \dots \qquad \square$$