

## 4.4 Basiswechsel

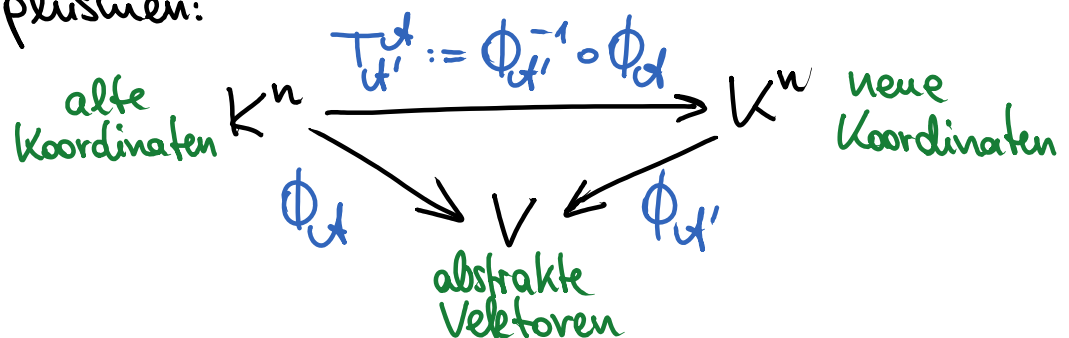
VL #18

Die darstellende Matrix  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$  hängt von der Wahl der Basen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  ab. Wie ändert sich die Matrix unter Basiswechsel  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}'$  bzw.  $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}'$ ?

### a) Koordinatentransformation

Bem.:

(1) Seien  $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$  und  $\mathcal{A}' = (v'_1, \dots, v'_n)$  Basen von  $V$  und  $\Phi_{\mathcal{A}}, \Phi_{\mathcal{A}'} : K^n \rightarrow V$  die zugehörigen Koordinatenabbildungen. Dann hat man ein Diagramm von Isomorphismen:



Die Matrix  $T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}} \in GL(n; K)$  <sup>§3.2(7)</sup> ist invertierbar und heißt **Transformationsmatrix** des Basiswechsels  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}'$ .

(2) für  $v \in V$  mit  $v = \sum_{j=1}^n x_j v_j$  und  $v = \sum_{j=1}^n x'_j v'_j$  gilt:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}$  transformiert die Koordinaten.

(3) Fall  $V = K^n$ : Konstruiere aus  $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$   $n \times n$ -Matrizen  $A = (v_1, \dots, v_n)$  und  $A' = (v'_1, \dots, v'_n)$ . Dann ist  $\Phi_{\mathcal{A}}(x) = Ax$  und  $\Phi_{\mathcal{A}'}$  analog, so daÙ gilt:

$$\begin{array}{ccc}
 K^n & \xrightarrow{T} & K^n \\
 & \searrow A & \swarrow A' \\
 & K^n & 
 \end{array}
 \quad \text{mit } T = (A')^{-1}A.$$

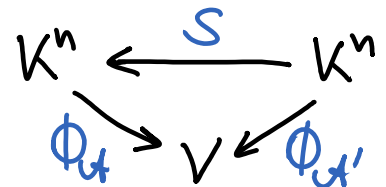
Ist  $\mathcal{A} = (e_1, \dots, e_n)$ , so folgt  $T = (A')^{-1}$ . ( $A = 1_n$ )

(4) Bsp.:  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{A} = (e_1, e_2)$ ,  $\mathcal{A}' = (v'_1, v'_2) = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$   
 $\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A')^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = T.$

Für  $v = -e_1 + e_2$  ist  $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , also  $x' = Tx = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$   
 $\Rightarrow v = -\frac{4}{5}v'_1 + \frac{3}{5}v'_2$

(5) für den allgemeinen Fall wie in Bem. (1) betrachte die Matrix  $S = (s_{ij}) \in K^{n \times n}$  mit  $v'_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} v_i$ .  
 (Koeffizienten der neuen Basisvektoren als Spalten)

Es gilt  $\Phi_{\mathcal{A}'} = \Phi_{\mathcal{A}} \circ S$ , also  $S = \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}'} = (T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}})^{-1}$   
 $\Rightarrow T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}} = S^{-1}$ . Diagramm:



Bew.:

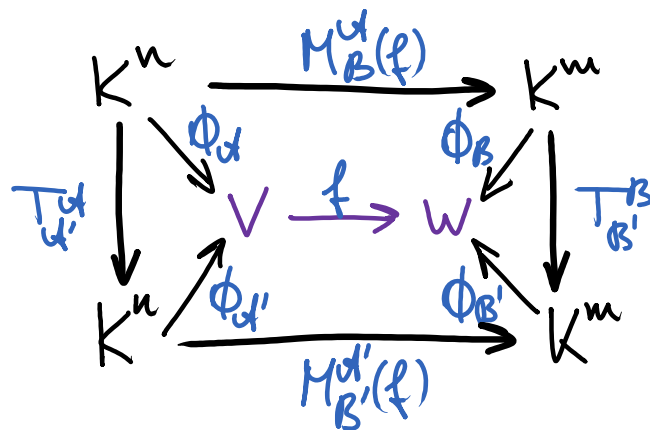
$$(\Phi_{\mathcal{A}} \circ S)(e_j) \stackrel{1}{=} \Phi_{\mathcal{A}} \left( \begin{pmatrix} s_{1j} \\ \vdots \\ s_{nj} \end{pmatrix} \right) \stackrel{2}{=} \sum_{i=1}^n s_{ij} v_i \stackrel{3}{=} v'_j \stackrel{4}{=} \Phi_{\mathcal{A}'}(e_j), \quad j=1, \dots, n.$$

1 Matrixprodukt, 2 Def.  $\Phi_{\mathcal{A}}$ , 3 Def.  $(s_{ij})$ , 4 Def.  $\Phi_{\mathcal{A}'}$  □

## b) Transformationsformel

### Satz: (Transformationsformel)

Ist  $f: V \rightarrow W$  linear, und sind  $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$  Basen von  $V$  und  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  Basen von  $W$ , so ist das folgende Diagramm kommutativ:



Insbesondere gilt:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{U}'}(f) = T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}}(f) \cdot T_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}.$$

$\stackrel{\text{green}}{=} (T_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{U}})^{-1}$

Bew.: Die viereckigen und dreieckigen Teile des Diagramms sind kommutativ. Also ist das gesamte Diagramm kommutativ, und die Transformationsformel lässt sich ablesen.

- Vierecke: darstellende Matrizen von  $f$  [§ 4.3c (3)]
- Dreiecke: Basiswechsel in  $V$  bzw.  $W$ . [§ 4.4a (1)]

□

Bem.:

(1) Sind  $A = M_B^A(f)$  und  $\tilde{A} = M_{B'}^{A'}(f)$  die Matrizen von  $f$  und  $T = T_{A'}^A$ ,  $S = T_{B'}^B$  Transformationsmatrizen, dann gilt also:

$$\tilde{A} = SAT^{-1}.$$

(2) Für Endomorphismen ( $W=V$ ) möchte man auch  $A=B=(v_1, \dots, v_n)$  setzen, also

$$M_B(f): \text{End}(V) \rightarrow K^{n \times n}, \quad f \mapsto A = (a_{ij})$$

$$\text{mit } \underline{f(v_j)} = \sum_{i=1}^n \underline{a_{ij}v_i} \text{ für } j=1, \dots, n.$$

(3) Korollar: Seien  $B$  und  $B'$  Basen von  $V$  und  $f \in \text{End}(V)$ . Dann ist  $M_{B'}(f) = T_{B'}^B M_B(f) T_B^{B'}$ , oder anders ausgedrückt:  $\tilde{A} = SAS^{-1}$

$$\text{für } A = M_B(f), \quad \tilde{A} = M_{B'}(f), \quad S = T_{B'}^B.$$

(4) Mit zwei Basen  $A$  und  $B$  können wir zu jeder linearen Abbildung eine Matrix in Diagonalform angeben. Sogar:  $A = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Für  $A=B$  gilt aber  $M_B(\text{id}_V) = \mathbb{1}_n$ .

Unter welchen Umständen lässt sich  $M_B(f)$  für  
allgemeines  $f \in \text{End}(V)$  auf eine einfache Form  
(z.B. Diagonalgestalt) bringen?

(→ Eigenwerte, Klassifikation von Matrizen)

(5) Beispiel:  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Basis  $B = (e_1, e_2)$ , dann ist  $A = M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ .

Wechsel zu Basis  $B' = (v'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v'_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix})$ :

Transformationsmatrix:  $S = T_{B'}^B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_{B'}(f) &= \tilde{A} = S A S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Probe:

$$f(v'_1) = f(e_1 + 2e_2) = f(e_1) + 2f(e_2) = -3(e_1 + 2e_2) = -3v'_1$$

$$f(v'_2) = f(-2e_1 - e_2) = -2[f(e_1) + \frac{1}{2}f(e_2)] = 0$$

(6) Transformationsformeln für  $A \in K^{n \times n}$ ,  $x \in K^n$ :

sei  $S \in GL(n; K)$ . Wegen  $SS^{-1} = 1_n$  gilt:

$$y = Ax \Leftrightarrow Sy = SAS^{-1}Sx \Leftrightarrow \tilde{y} = \tilde{A}\tilde{x} \text{ mit} \\ \tilde{x} = Sx, \tilde{y} = Sy \text{ und } \tilde{A} = SAS^{-1}.$$

(7) Beispiel 2:  $V = \mathbb{R}[t]_3$ , reelle Polynome bis Grad 3

• Abbildung  $D: \mathbb{R}[t]_3 \rightarrow \mathbb{R}[t]_3$ ,  $P(t) \mapsto \frac{d}{dt} P(t)$

• Basis  $B = (1, t, t^2, t^3)$

Ableitung

• darstellende Matrix:

$$M_B(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{matrix}$$

$$D(1) = 0 \uparrow$$

$$\uparrow D(t^2) = 2t$$

• neue Basis:  $B' = (1, 1+t, \underbrace{t + \frac{1}{2}t^2}_{v'_3}, \underbrace{\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3}_{v'_4})$

• Transformationsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{B'}^{-1} =: S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix},$$

$\Delta$  S wie in §4.4b(1),  
nicht wie §4.4a(5).

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Koeffizienten  
von  $v'_3$  bzgl.  $B$

$$\Rightarrow M_{B'}(D) = S \cdot M_B(D) \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Koeffizienten von  $D(v'_3)$   
bzgl.  $B'$

$$\text{z.B.: } D(v'_3) = \frac{d}{dt} \left( t + \frac{1}{2}t^2 \right) = 1 + t = v'_3$$